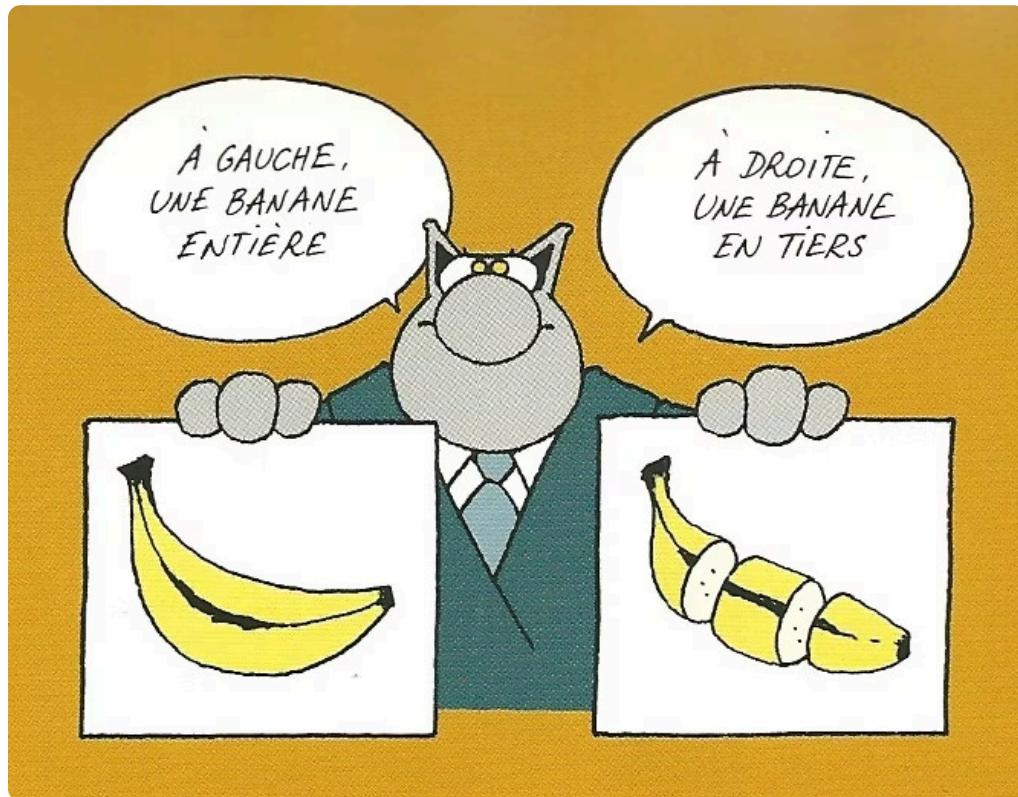


Enseigner les fractions à l'école

Partie 1

Pourquoi ? Comment ? Quand ?



par Claire Lommé

Claire Lommé

Enseignante en collège (maths, Normandie),

Enseignante spécialisée (ULIS, Normandie)

Chargée de mission "Vulnérabilité scolaire" (EAFC Normandie)

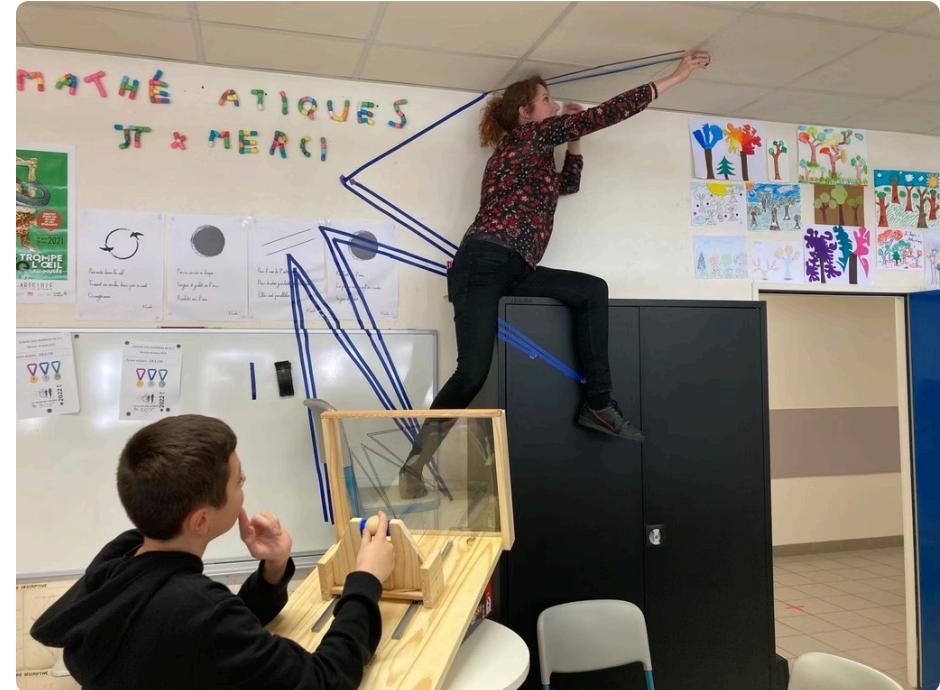
Formatrice (EAFC, CAPPEI), animatrice,

Auteure,

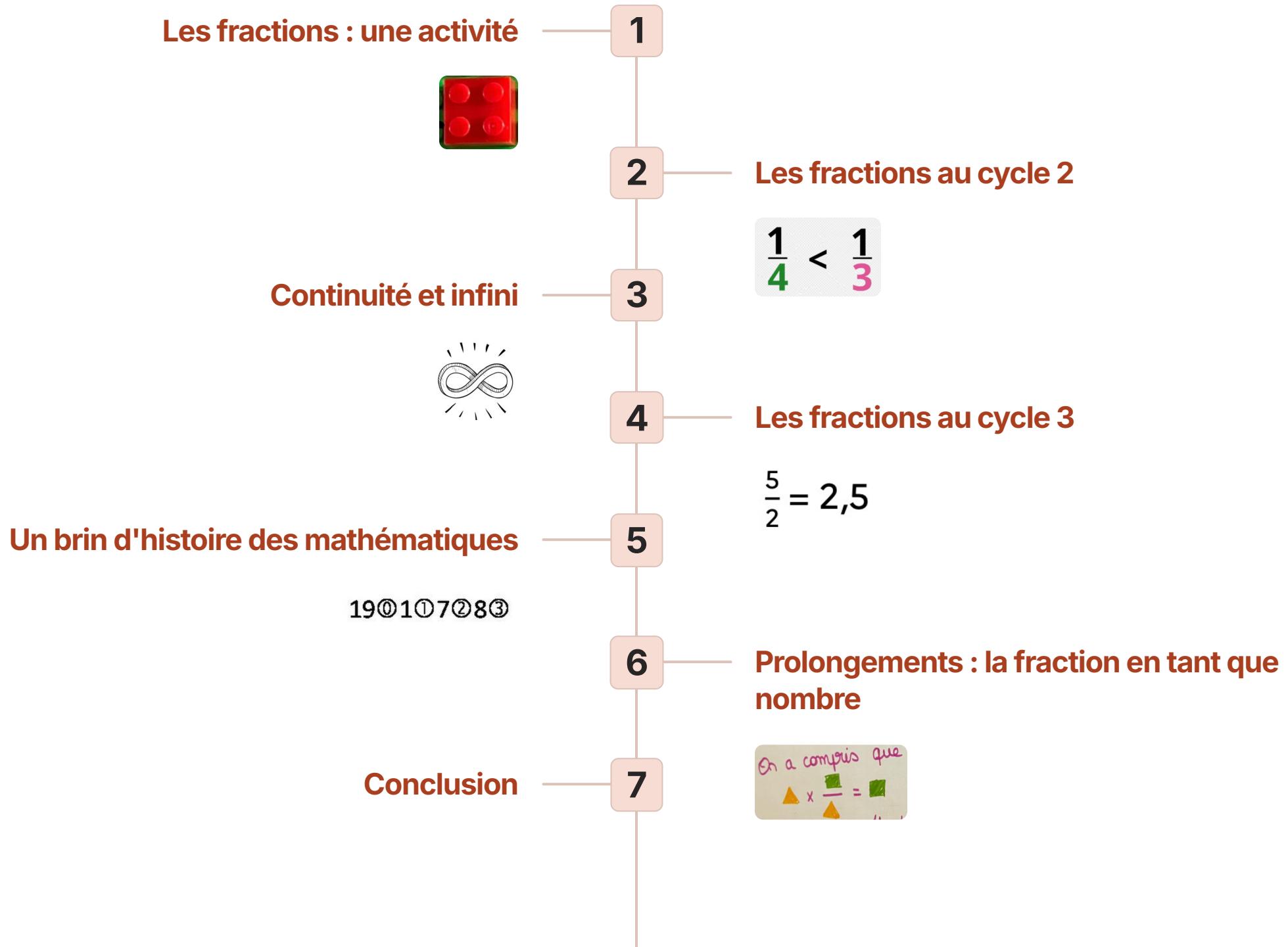
Auteure du blog Pierre Carrée

<https://clairelommeblog.wordpress.com>

Claire.lomme@ac-normandie.fr

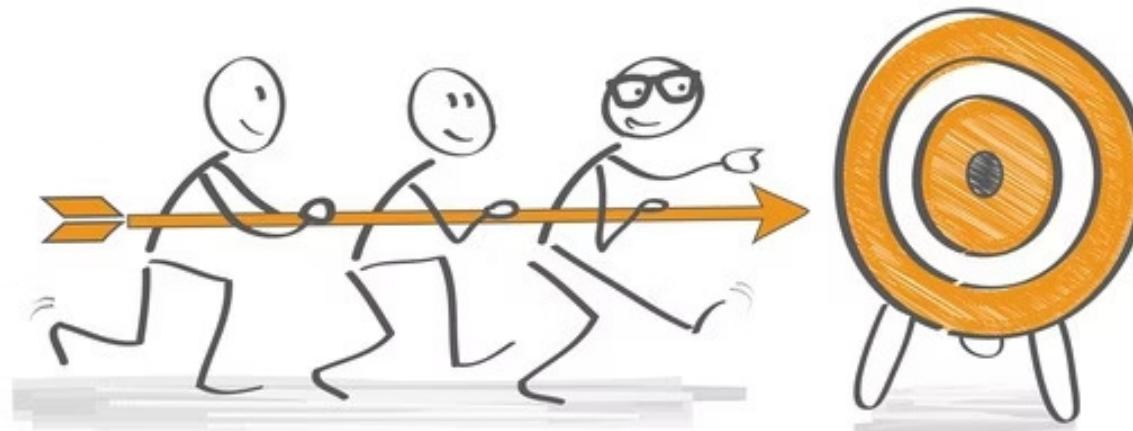


Le plan



Mes objectifs

- Vous partager ma lecture des programmes sur un point précis : les fractions ;
- Vous apporter des éléments didactiques ;
- Vous apporter des idées pédagogiques ;
- Mettre en lumière la progression et la continuité des objectifs des programmes.



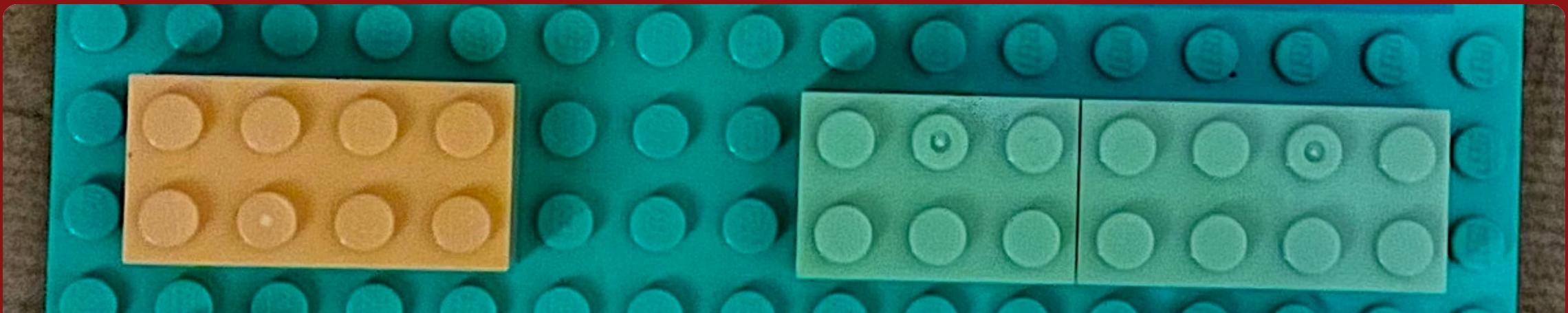
Mon pré-requis

Ce n'est pas parce que des élèves éprouvent des difficultés sur tel ou tel point qu'on ne peut pas leur enseigner autre chose, ni même aller plus loin.

→ Accessibilité

→ Éducabilité





1- Les fractions : une activité

Objectifs :

- Engager les élèves (**dévolution**)
- Manipuler pour comprendre en éprouvant ses **conjectures**
- Visualiser la fraction pour ensuite la visualiser **mentalement** ;
- S'outiller d'un **vocabulaire** commun ;
- Avancer dans la compréhension du **nombre** ;
- Lier fraction et **calcul**.

1- Les fractions : une activité

Cette brique représente l'unité, c'est-à-dire qu'elle représente le nombre 1.



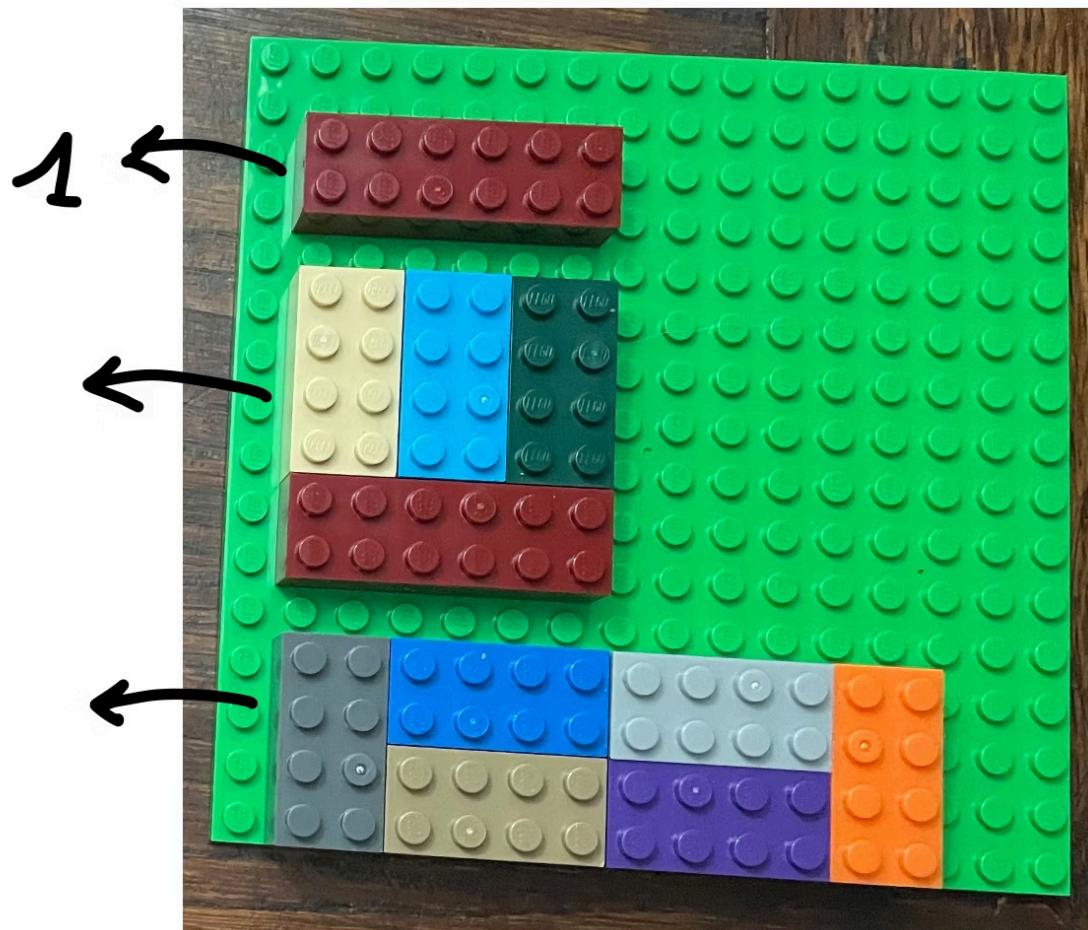
Nous allons appeler chaque excroissance un picot. Combien cette brique a-t-elle de picots ?

Du coup, ça, ça représente quoi ?

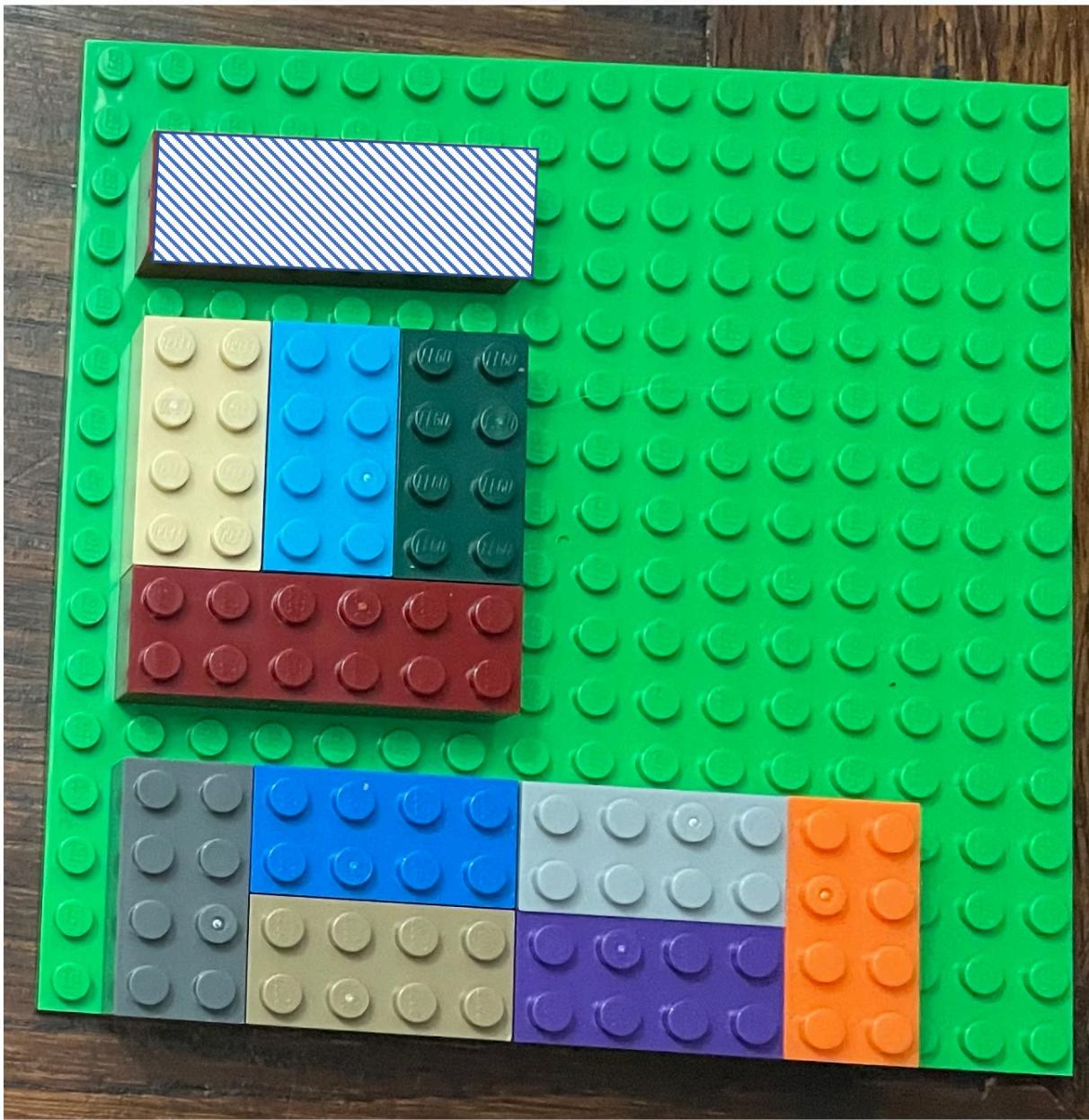


1- Les fractions : une activité

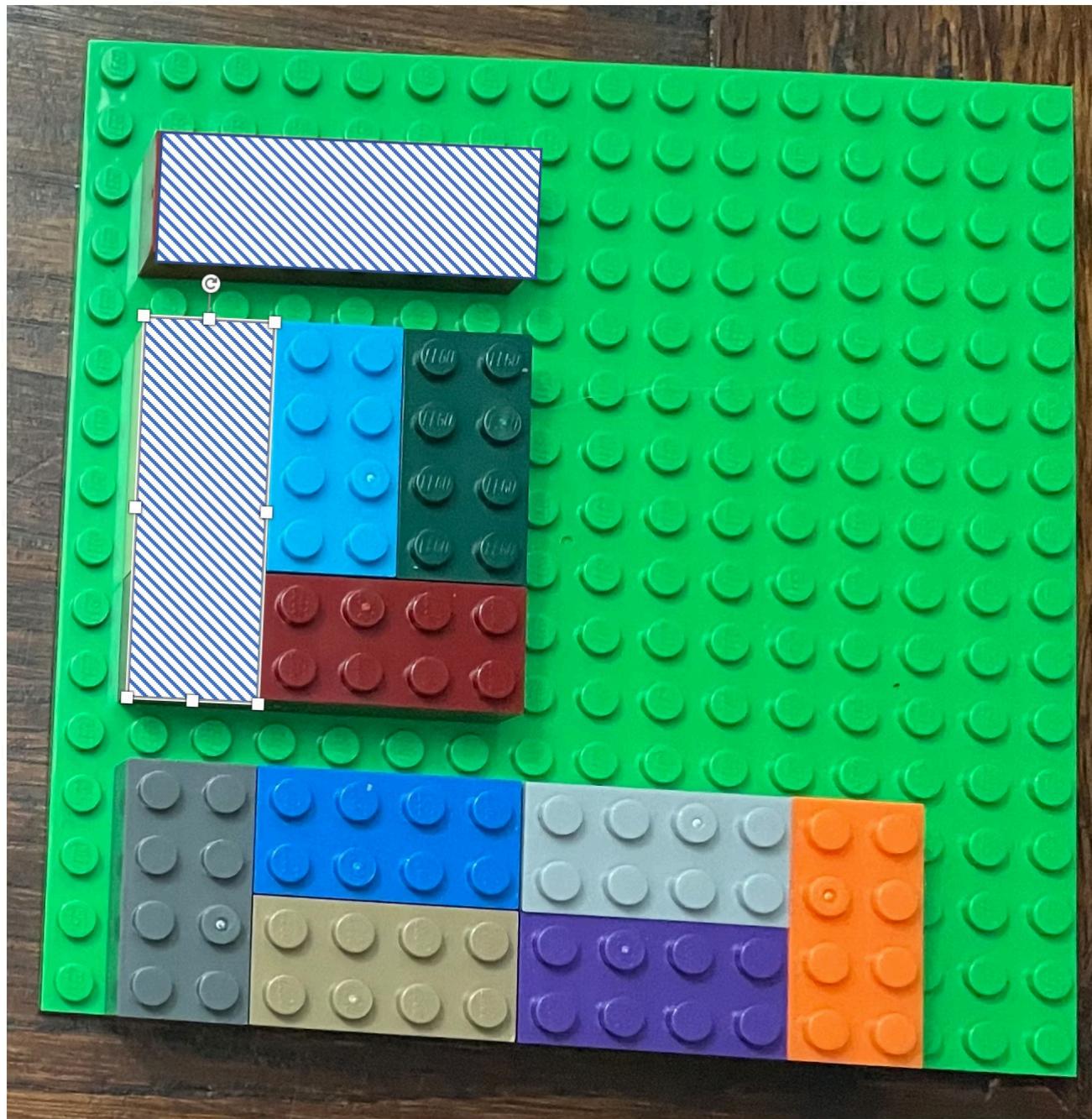
Je vais vous montrer 10 constructions. Je voudrais que vous écriviez sur votre feuille le nombre associé. Comme ça, par exemple :



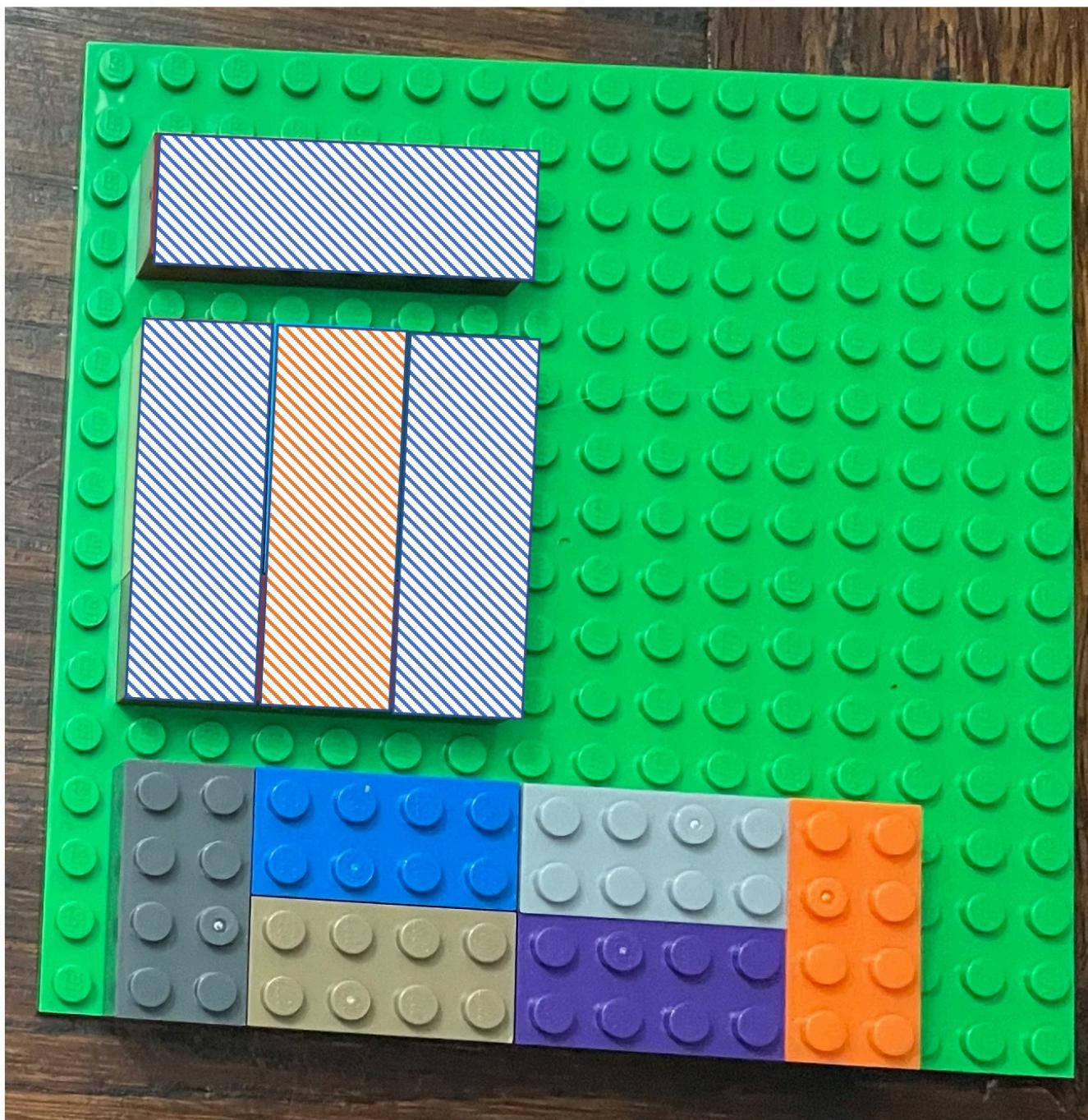
1- Les fractions : une activité



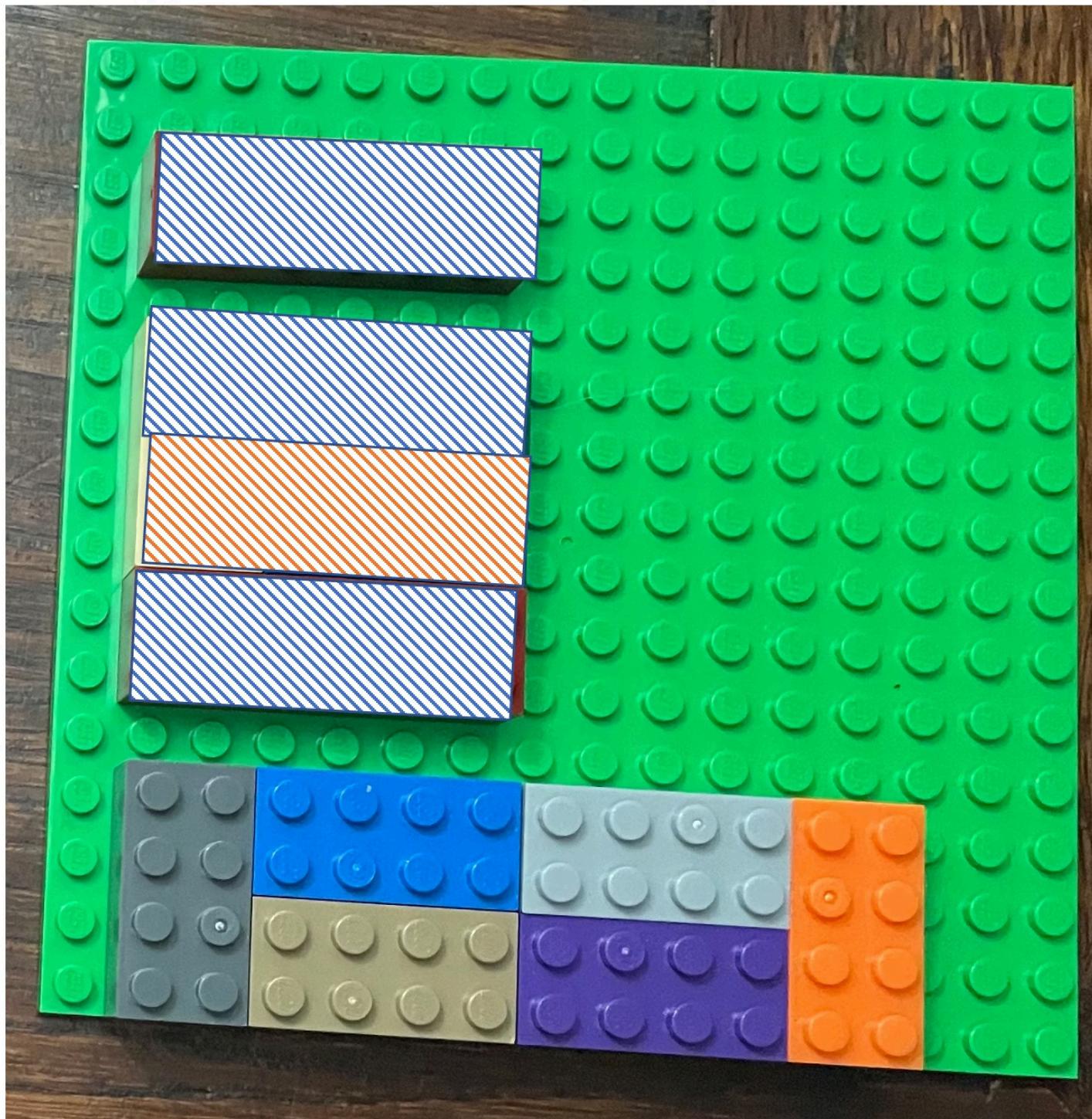
1- Les fractions : une activité



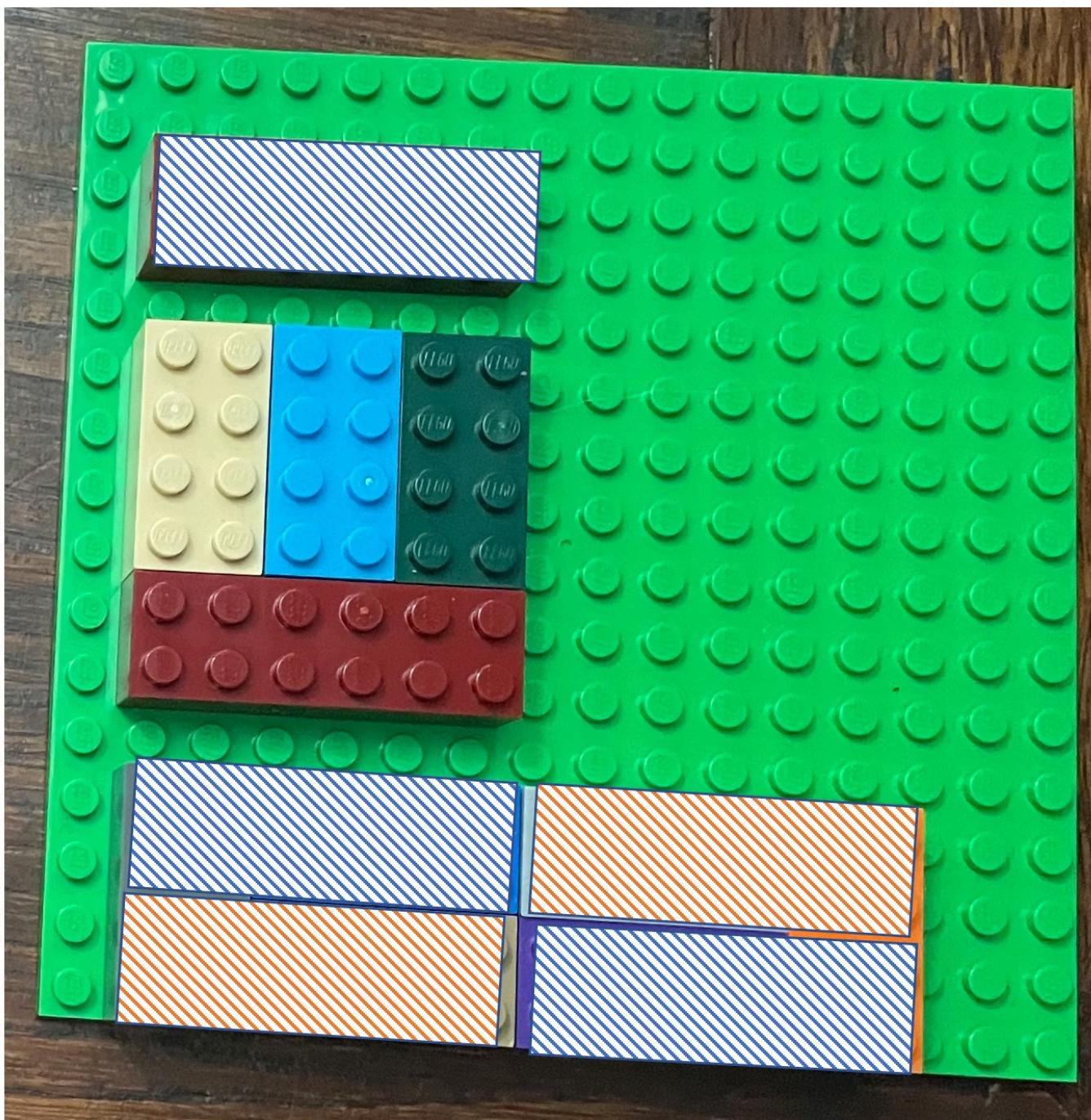
1- Les fractions : une activité



1- Les fractions : une activité

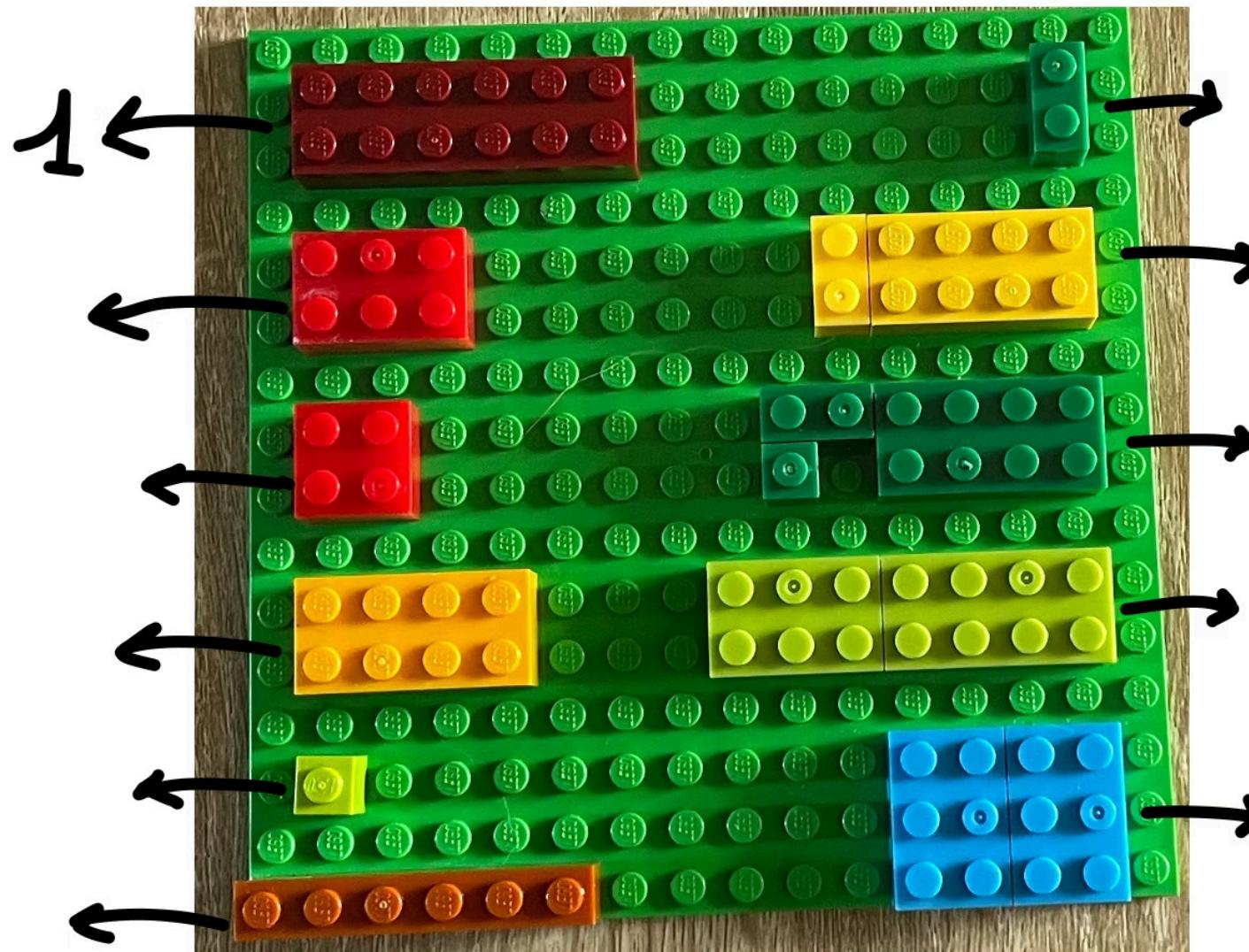


1- Les fractions : une activité



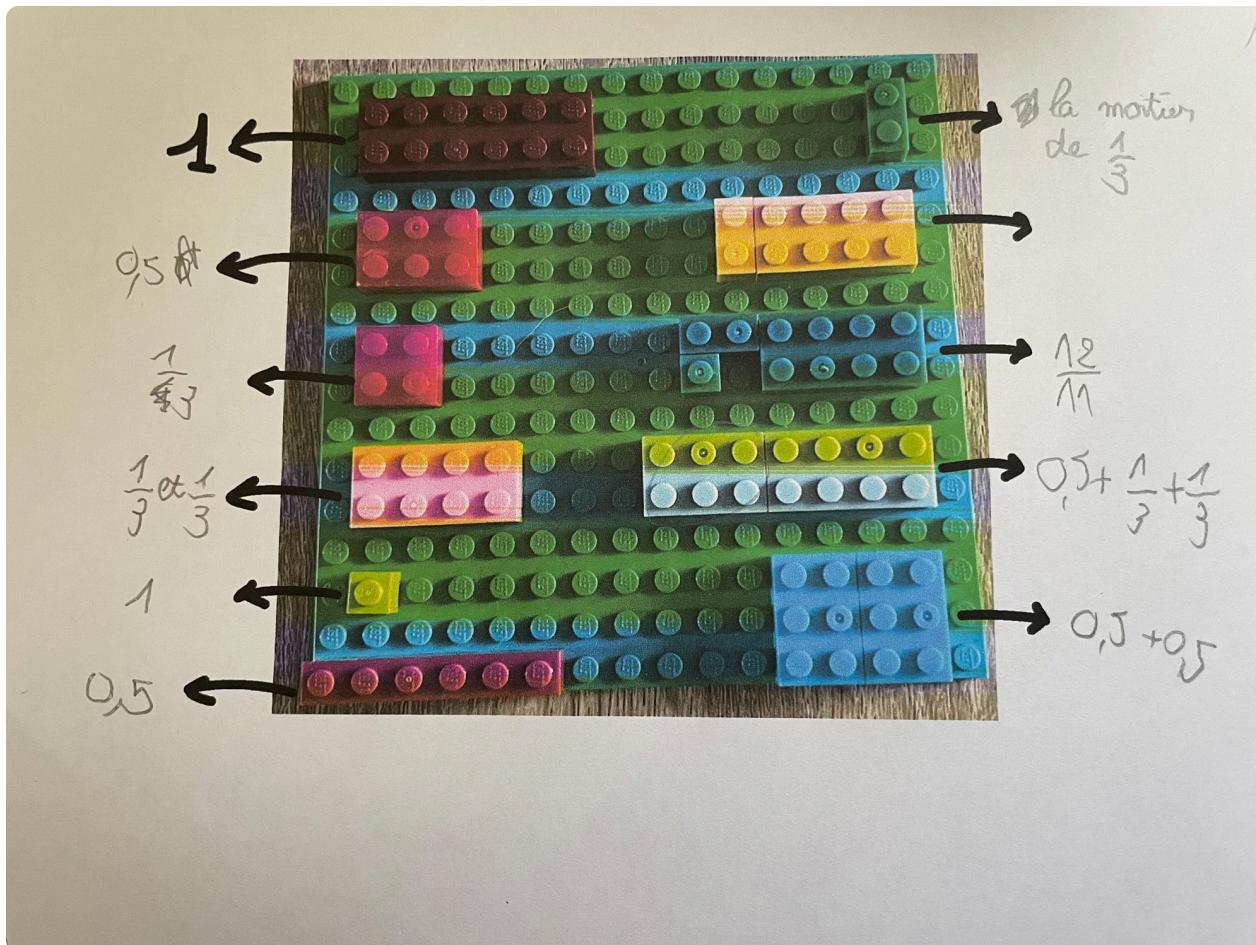
1- Les fractions : une activité

A vous !



Quels objectifs péda/dida, selon vous ?

1- Les fractions : une activité



Maxime commence par écrire 6, puis se ravise. Il ne pense pas encore à la fraction.

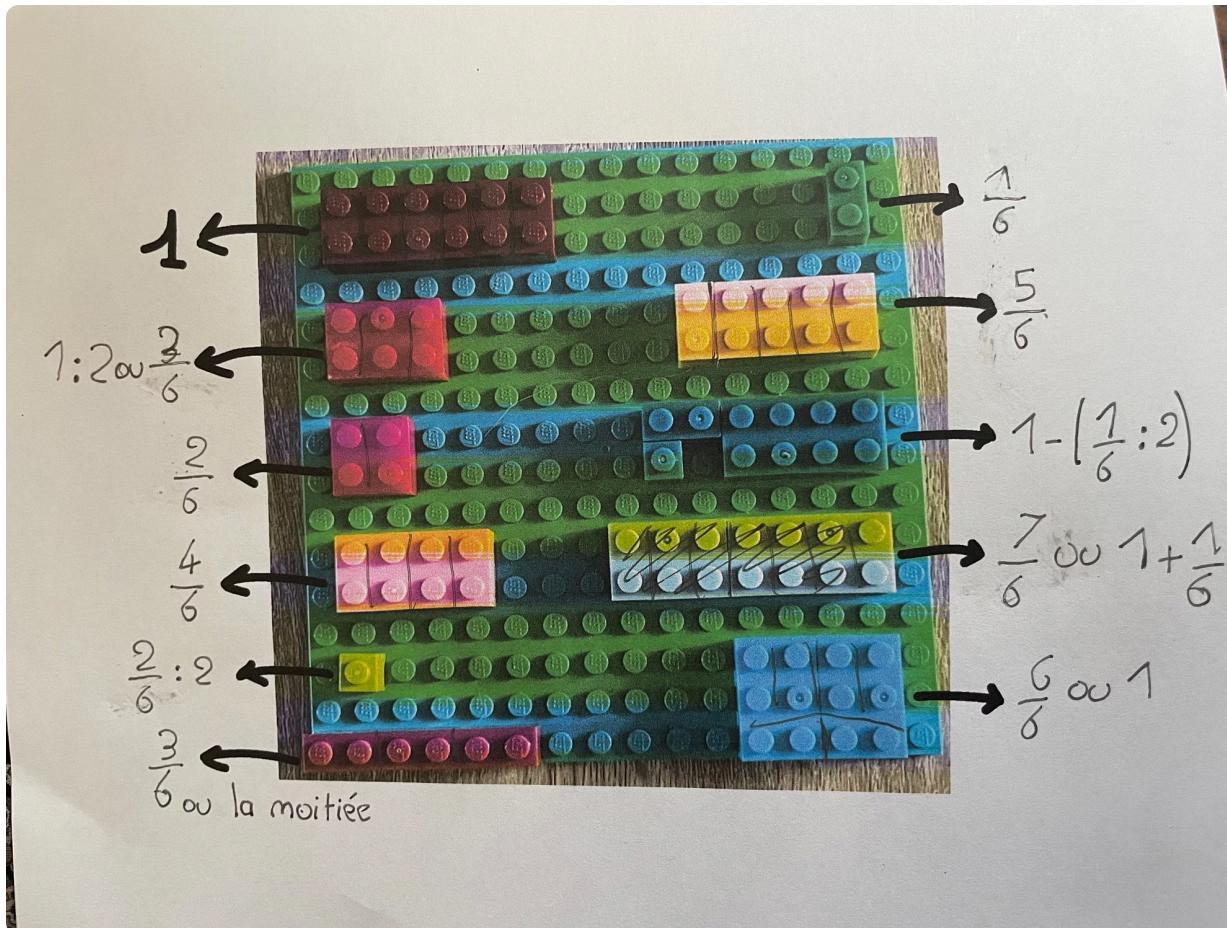
Pour 1/3, il commence par écrire 1/4, "parce que c'est plus petit que la moitié". Mais en vérifiant par la manipulation il comprend que "Un quart c'était trop grand mais 1,3 ça marchait alors j'ai écrit 1 slash 3".

Maxime privilégie une entrée par le calcul.

La notation de fraction est peu naturelle pour lui, peu signifiante (1 ; 12/11).

→ DONNER DU SENS À LA FRACTION

1- Les fractions : une activité



Maëlyne a commencé par la brique verte en haut à droite. De ce fait elle se calque sur $1/6$ pour compléter ensuite.

On voit une approche de la multi-représentation, mais Maëlyne n'écrit pas " $=$ ", même sur mon incitation.

Maëlyne s'aide de la manipulation, à partir d'une pièce correspondant à $1/6$.

→ TRAVAILLER LES CHANGEMENTS D'ÉCRITURES

1- Les fractions : une activité

Des limites de l'activité :

- Toutes les constructions sont polygonales : il faudra d'autres exemples (schématisés) pour élargir ses conceptions ;
- Attention à numérotter les construction pour les élèves daltoniens ;
- La fraction est vue comme "fraction de". Il faut donc continuer de travailler pour abstraire et aboutir au nombre en tant qu'idéalité.



1- Les fractions : une activité

Quels enseignements tirer de cette expérience en collège ?

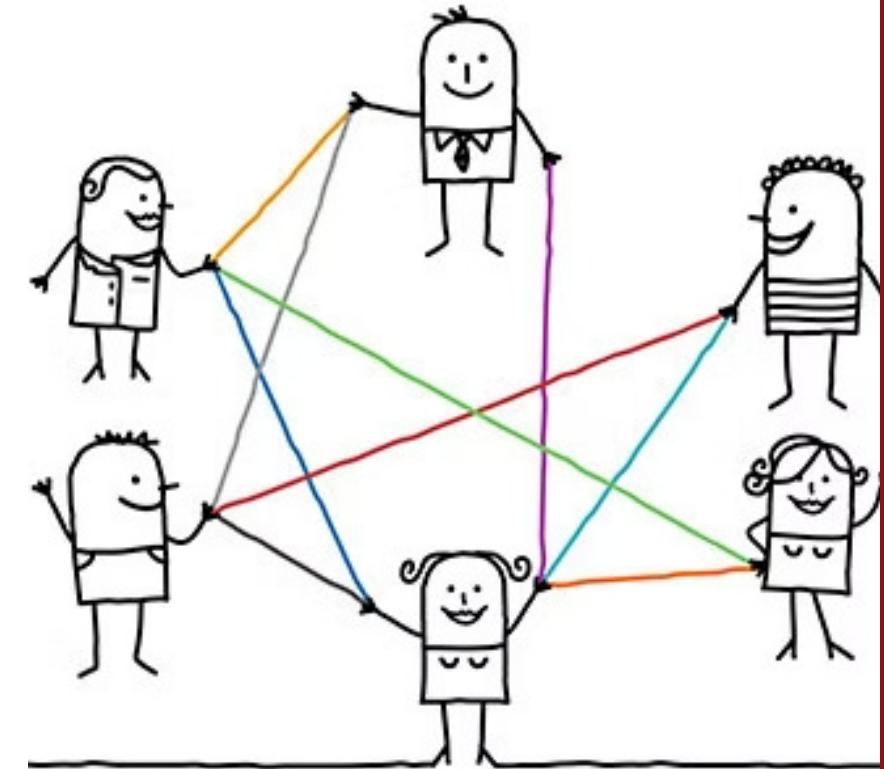
- La fraction est un **concept très délicat** ;
- La fraction porte de **multiples sens**, plus ou moins implicitement : partage, division, mesure, proportion, nombre...
- Ces sens multiples rendent l'accès mental à la fraction difficile ;
- L'écriture, la lecture, la verbalisation des fractions est également compliquée.

De plus, la fraction est indispensable pour construire harmonieusement des apprentissages en mathématiques, dans tous les domaines.

En particulier, elle sous-tend l'apprentissage des nombres décimaux.

1- Les fractions : une activité

Nous devons donc, pour une acquisition la plus accessible et efficace possible, tisser l'enseignement des fractions du cycle 2 au cycle 4.



2- Les fractions au cycle 2 - CP

Pas de fraction au programme, mais on pose les fondations, et il faut qu'elles soient solides

- La manipulation, avec différents types de matériels, pour représenter, s'interroger, vérifier, imaginer... ;
- Le concept d'une unité ;
- Le principe positionnel de numération ;
- Comparer, ordonner, encadrer, intercaler : des mots fondamentaux ;
- Donner du sens à des éléments sémiotiques cruciaux : $=$, $<$, $>$, $+$, $-$;
- Le sens de la multiplication ;
- Les problèmes de partage ;
- Des éléments de langage : autant, plus que, moins que ;
- Les doubles et les moitiés de nombres usuels : premiers pas vers les fractions ;
(la moitié de la moitié)



2- Les fractions au cycle 2 - CE1

- Quelle(s) fraction(s) ?
- Les mots ;
- La comparaisons de fractions ;
- Additions et soustractions de fractions.



2- Les fractions au cycle 2 - CE1

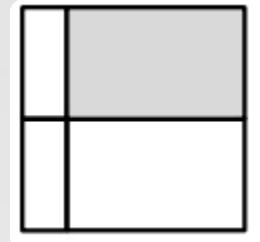
Quelle(s) fraction(s) ?

Des fractions inférieures ou égales à 1 (proper fraction);

Des demis, des quarts, des tiers, des cinquièmes, sixièmes, huitièmes, dixièmes

;

Des fractions unitaires (de numérateur égal à 1) puis des fractions non unitaires ;



La fraction d'un tout : un rapport entre la partie et le tout ;

Un point de vigilance : **le partage en parts égales** ;

2- Les fractions au cycle 2 - CE1

Les mots

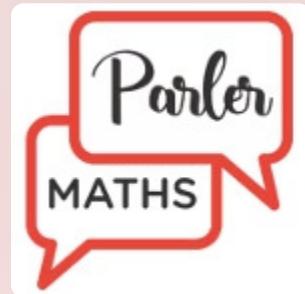
« moitié », « demi » et « quart » ;

« sur... », « x-ième » ;

Numérateur, dénominateur.

La notation ?

→ TRÈS TRÈS TRÈS IMPORTANT



Exercice 1 – partie 1

Écris ces fractions en chiffres :

Exemple :

Cinq neuvièmes : $\frac{5}{9}$

Un tiers	Trois cinquièmes	Quatre dixièmes
Deux tiers	Un demi	Deux quarts
Six huitièmes	Trois septièmes	Onze demis
Cinq tiers	Trois quarts	Un quart
Six demis	Quatorze douzièmes	Huit dixièmes
Trois centièmes	Treize septièmes	Cinq quarts
Dix tiers	Cent demis	Trois dixièmes

Exercice 1 – partie 2

Choisis la (ou les) bonne(s) expression(s) pour la fraction proposée :

Exemple : $\frac{5}{9}$

Cinq neuvièmes

Neuf cinquièmes

Cinq virgule neuf

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$
<input type="checkbox"/> Deux	<input type="checkbox"/> Trois demis	<input type="checkbox"/> Sept dix
<input type="checkbox"/> Un demi	<input type="checkbox"/> Deux sur trois	<input type="checkbox"/> Sept virgule dix
<input type="checkbox"/> Un virgule deux	<input type="checkbox"/> Deux tiers	<input type="checkbox"/> Sept dixièmes
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$
<input type="checkbox"/> Quart	<input type="checkbox"/> Trois sur cinq	<input type="checkbox"/> Deux cinquièmes
<input type="checkbox"/> Un quart	<input type="checkbox"/> Trois cinq	<input type="checkbox"/> Cinq deuxièmes
<input type="checkbox"/> Un virgule quatre	<input type="checkbox"/> Trois cinquièmes	<input type="checkbox"/> Cinq sur deux
$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{3}{4}$
<input type="checkbox"/> Sept troisièmes	<input type="checkbox"/> Dix virgule douze	<input type="checkbox"/> Trois demis
<input type="checkbox"/> Sept tiers	<input type="checkbox"/> Dix sur douze	<input type="checkbox"/> Trois tiers
<input type="checkbox"/> Sept sur trois	<input type="checkbox"/> Douze dixièmes	<input type="checkbox"/> Trois quarts
$\frac{4}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{6}{10}$
<input type="checkbox"/> Quatre quatrièmes	<input type="checkbox"/> Sept virgule vingt	<input type="checkbox"/> Six dixièmes
<input type="checkbox"/> Quatre quarts	<input type="checkbox"/> Sept vingt	<input type="checkbox"/> Six virgule dix
<input type="checkbox"/> Une unité	<input type="checkbox"/> Sept vingtièmes	<input type="checkbox"/> Six sur dix
$\frac{4}{9}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{3}{3}$
<input type="checkbox"/> Quatre neuf	<input type="checkbox"/> Zéro	<input type="checkbox"/> Trois virgule trois
<input type="checkbox"/> Quatre sur neuf	<input type="checkbox"/> Zéro sur deux	<input type="checkbox"/> Une unité
<input type="checkbox"/> Quatre virgule neuf	<input type="checkbox"/> Zéro demis	<input type="checkbox"/> Trois tiers

2- Les fractions au cycle 2 - CE1

Fractions

Souviens-toi :

- Une fraction est un [nombre](#).
- On peut la comprendre comme un [partage](#).
- Elle correspond à l'opération [division](#) (\div)

5
—
9

① Une unité (le nombre 1) est séparée en 9 parts égales

② On considère 5 parts (égales) de ce partage

Ce nombre se lit

« [cinq](#) neuvièmes » ou « [cinq](#) sur [neuf](#) »

Souviens-toi :

- « [demis](#) » \leftrightarrow « [sur 2](#) » \leftrightarrow $\frac{\dots}{2}$
- « [tiers](#) » \leftrightarrow « [sur 3](#) » \leftrightarrow $\frac{\dots}{3}$
- « [quarts](#) » \leftrightarrow « [sur 4](#) » \leftrightarrow $\frac{\dots}{4}$
- « [cinquièmes](#) » \leftrightarrow « [sur 5](#) » \leftrightarrow $\frac{\dots}{5}$
- Etc.

2- Les fractions au cycle 2 - CE1

- La comparaison de fractions d'un tout

Un apprentissage contre-intuitif

$$\frac{5}{6} > \frac{4}{6}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

2- Les fractions au cycle 2 - CE1

Additionner et soustraire des fractions

On envisage toujours les fractions comme **fractions d'un tout**.

« *Deux tiers du tout moins un tiers du tout, cela fait un tiers du tout* »

« *Un cinquième du tout plus deux cinquièmes du tout, cela fait trois cinquièmes du tout* ».

« *Deux cinquièmes du tout plus trois cinquièmes du tout, cela fait cinq cinquièmes du tout, c'est-à-dire le tout* »

Évocation de la multiplication d'une fraction par un entier, au sens de l'addition itérée

On s'engage vers les changements d'écriture : trois fois un sixième font un demi, deux fois un sixième font un tiers.

2- Les fractions au cycle 2 - CE1

Une conclusion : il est indispensable de lier les représentations, les verbalisations, les éléments de manipulation et le calcul.

Pause questions



2- Les fractions au cycle 2 - CE2

- Quelle(s) fraction(s) ?
- Les changements d'écriture ;
- Ordonner, encadrer ;
- Additions et soustractions de fractions et résolution de problèmes.

2- Les fractions au cycle 2 - CE2

Quelle(s) fraction(s) ?

Des dénominateurs jusqu'au douzième ;

La fraction d'une unité de longueur : la mesure

« Les élèves sont ainsi capables de mesurer ou de tracer des segments de longueur « une demi-unité » ou « deux unités plus un quart d'unité »

2- Les fractions au cycle 2 - CE2

□ Les changements d'écriture

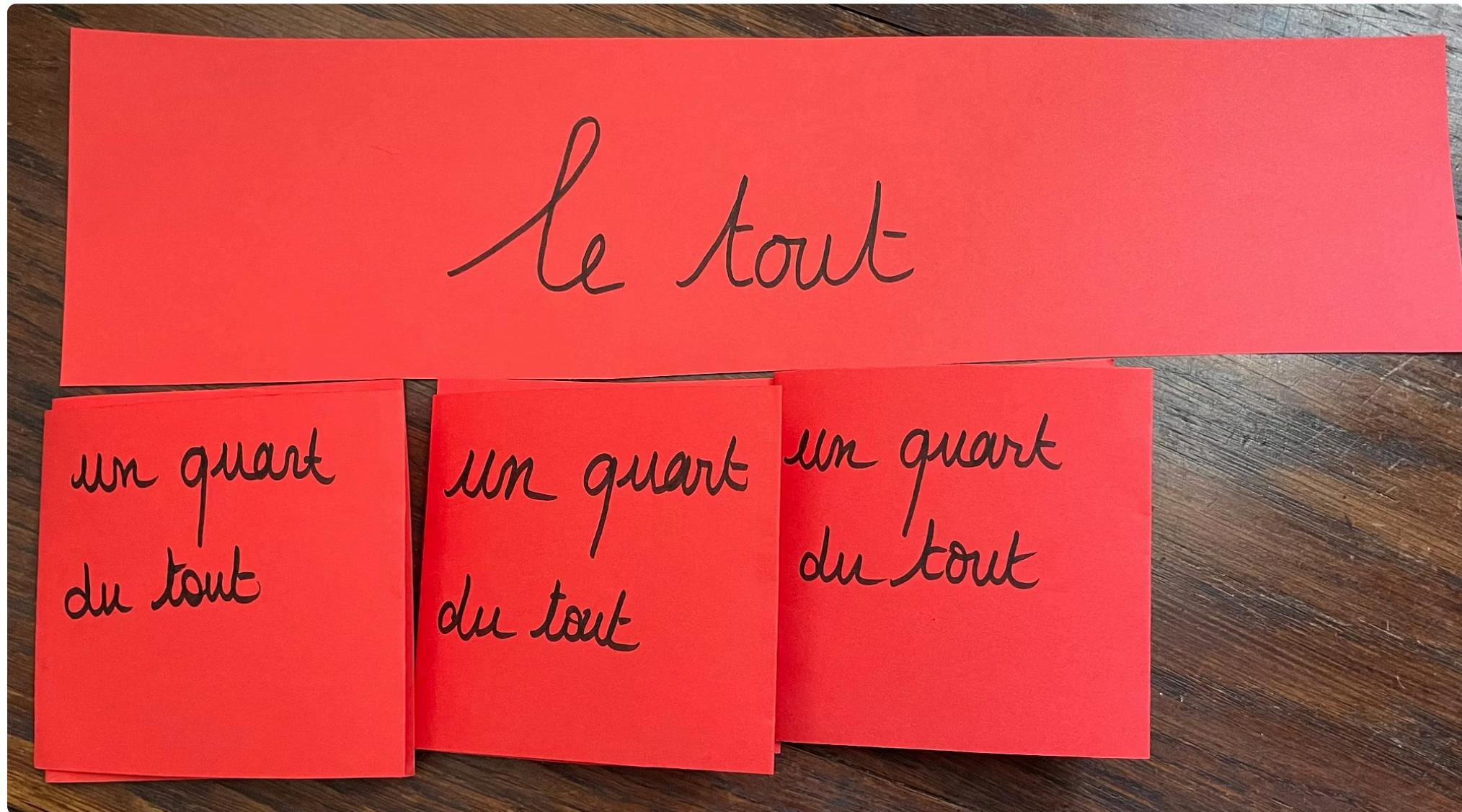
$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Si, pour un même tout, je fais des parts deux fois plus petites et si je prends deux fois plus de parts, alors j'en prends la même quantité.



2- Les fractions au cycle 2 - CE2

Une activité : bandes de papier !



2- Les fractions au cycle 2 - CE2

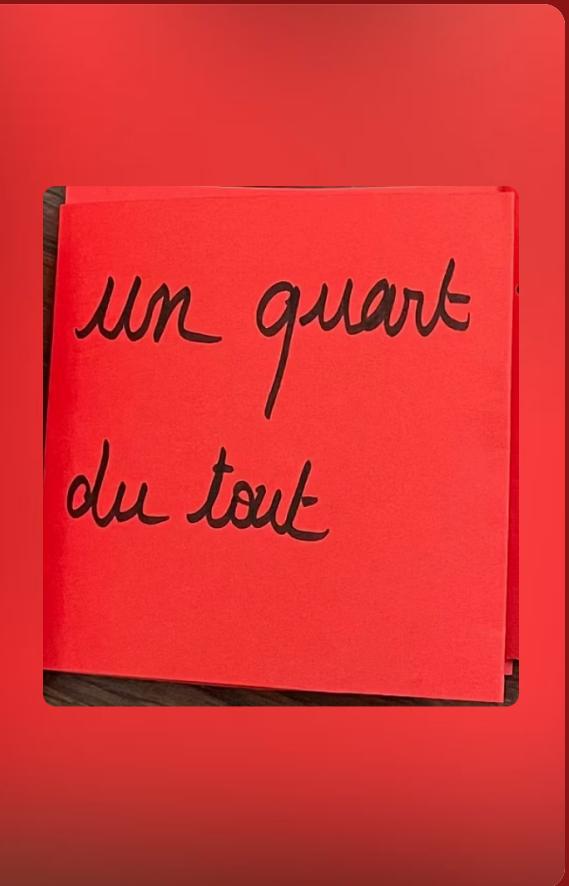
Une activité : bandes de papier !

→ L'intérêt du pliage

Objectifs :

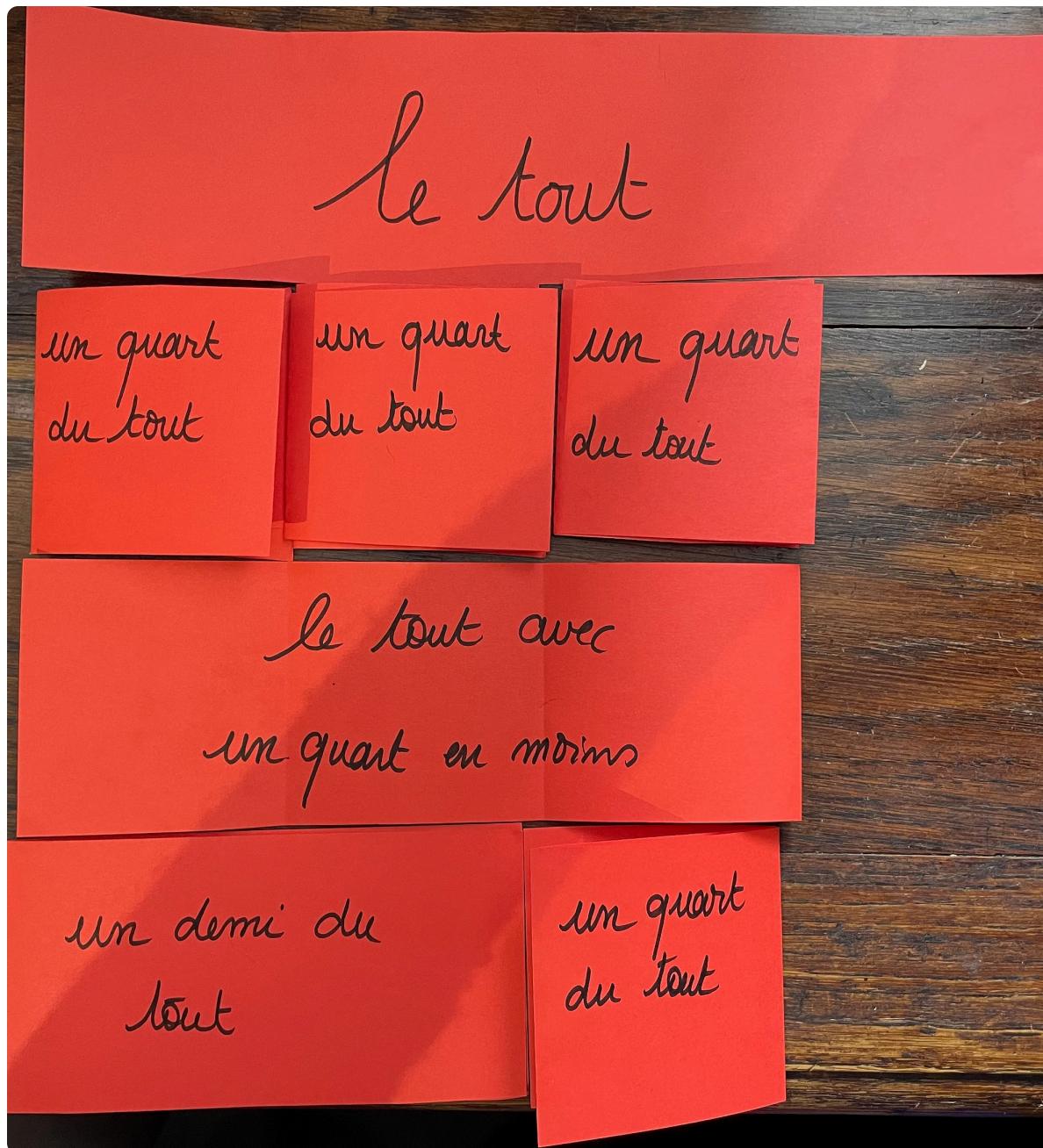
- Multi-verbaliser
- Associer à la fraction sa nature de nombre

→ Attention à diversifier les supports, à ne pas se cantonner à la bande rectangulaire



2- Les fractions au cycle 2 - CE2

Trois quarts ?



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

2- Les fractions au cycle 2 - CP, CE1, CE2, ...



YouTube

Fractions pour C2 C3

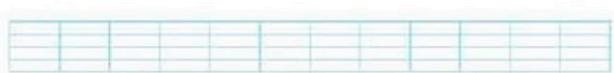


Exercice 4 – niveau 1

Exemple :

L'unité est la bande carreaux entière.

Colorie la fraction indiquée.

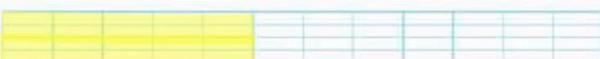


$\frac{5}{12}$

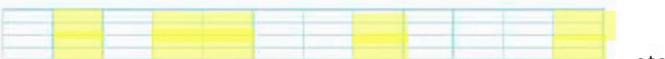
① Je dénombre le nombre de parts égales dans l'unité (la bande) : 12

② Je repère le nombre de parts égales indiquées par la fraction : 5

③ Je réponds à la question :



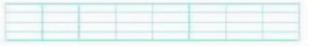
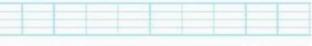
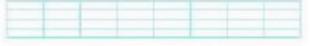
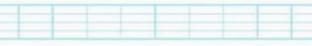
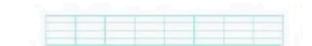
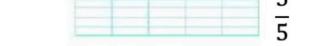
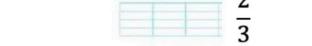
J'aurais aussi pu répondre ainsi :



, etc.

L'unité est la bande carreaux entière.

Colorie la fraction indiquée.

	$\frac{3}{8}$		$\frac{7}{12}$
	$\frac{3}{10}$		$\frac{8}{8}$
	$\frac{3}{12}$		$\frac{2}{9}$
	$\frac{5}{10}$		$\frac{5}{8}$
	$\frac{5}{5}$		$\frac{2}{3}$

Exercice 4 – niveau 2.

Exemple :

L'unité est la bande carreaux entière.

Colorie la fraction indiquée.



① Je dénombre le nombre de carreaux dans l'unité (la bande) : 12

Ici, c'est différent : la bande n'est pas composée de 4 cases !

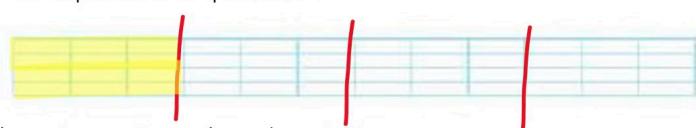
② Je trouve comment partager la bande entière en 4 parties égales (car on me

demande $\frac{1}{4}$.



③ Je repère le nombre de parts égales indiquées par la fraction : 1 (car on me demande $\frac{1}{4}$)

④ Je réponds à la question :



J'aurais aussi pu répondre ainsi :



Dans les questions de la page suivante, l'unité est la bande carreaux entière.

Colorie la fraction indiquée.

2- Les fractions au cycle 2 - CE2

□ Ordonner, encadrer

Reconsidérer la comparaison des fractions déjà travaillée comme fractions d'un tout

Comparer (dénominateurs multiples l'un de l'autre) : $7/12 < 5/6$ car ...

→ Manipulations, représentations !

2- Les fractions au cycle 2 - CE2

□ Additions et soustractions de fractions

Fractions dont les dénominateur sont des multiples.

Applications à la résolution de problèmes

→ Manipulations, représentations !

2- Les fractions au cycle 2 - CP, CE1, CE2

Le repérage dans le temps et les durées

Deux heures et demie

Six heures moins le quart

Midi et quart



2- Les fractions au cycle 2 - CP, CE1, CE2

- La monnaie, à aborder avec une grande rigueur pour permettre aux enseignants de cycle 3 de construire les décimaux ;

L'utilisation de l'écriture à virgule pour la monnaie se fait de façon pratique et concrète, sans introduire le nom des unités de numération ;

La virgule est présentée comme le signe qui permet de **repérer le chiffre des unités d'euro**

$$345 \text{ centimes} = 300 \text{ centimes} + 45 \text{ centimes} = 3 \text{ €} + 45 \text{ centimes} = 3,45 \text{ €} ;$$

Additions et soustractions de montants en euro.

L'élève sait poser et effectuer des additions.





Merci de votre attention !

J'espère vous avoir intéressé(e)s,

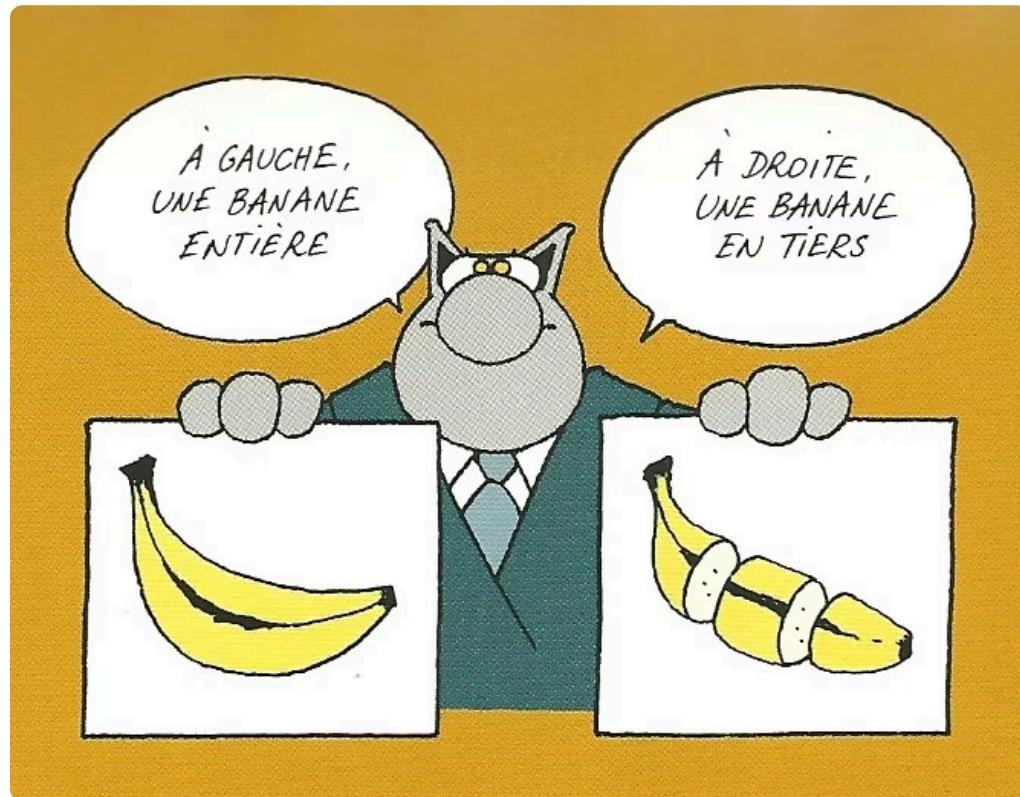
J'espère vous être utile.

Avez-vous des questions ?

Enseigner les fractions à l'école

Partie 2

Pourquoi ? Comment ? Quand ?



par Claire Lommé

Previously...

Au fil du cycle 2, un tissage de la fraction ;

Du rapport d'une partie au tout à une fraction d'unité de longueur ;

De l'ambition : la porte est ouverte dès le départ de l'apprentissage de la fraction pour engager vers le nombre.



2- Les fractions à l'école - détour

La fraction d'une unité de longueur est une révolution dans les programmes :

au cycle 2, on construit les fractions pour qu'en fin de cycle 2 les élèves puissent envisager la continuité des nombres réels, autrement que par les nombres décimaux.

« Les élèves peuvent alors mobiliser les fractions dans des situations de mesurage de longueurs par rapport à une unité donnée, quand les entiers ne suffisent plus pour coder ces mesures. »

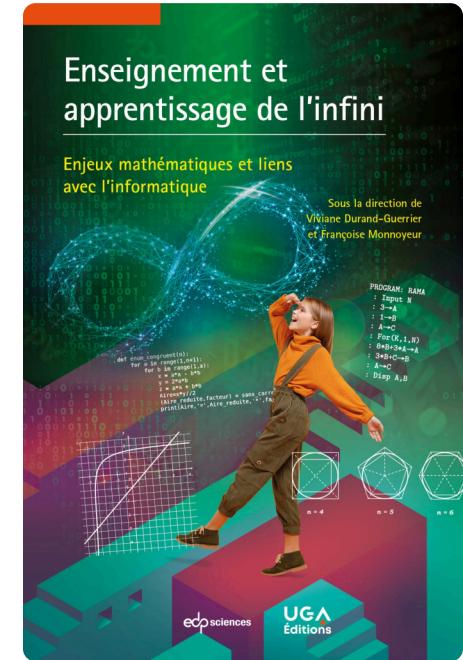


2- Les fractions à l'école - détour

« *L'esprit humain peut aller plus loin qu'une machine. (...) Selon l'hypothèse du continu il n'existe pas un infini intermédiaire entre l'infini discret et dénombrable des entiers naturels et l'infinité continue des nombres réels.* »

→ Infini potentiel, infini actuel

Laisser le temps d'assimiler les fractions avant de recourir aux décimaux, si pratiques mais à l'écriture finie, c'est permettre aux élèves de conceptualiser bien plus que des parts de pizzas.



2- Les fractions à l'école - détour

Laisser le temps d'assimiler les fractions avant de recourir aux décimaux, c'est permettre aux élèves de penser la continuité des nombres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9



2- Les fractions à l'école - détour

Un outil : Micetf



micetf.fr



Générateurs de fractions

Générateur de représentations pour des fractions inférieures à un en HTML5

La droite des réels n'a pas à être graduée systématiquement de 10 sous-unités en 10 sous-unités.

3- Les fractions au cycle 3 - CM1

Dans la continuité, on se muscle sur la technique et on prend du recul sur le sens :

- Interpréter, représenter, écrire, dire, lire des fractions (d'un tout, d'une unité de longueur) ;
- Improper fraction / mixed number ;
- Encadrer, comparer, **repérer** → la fraction devient nombre, progressivement ;
- Additionner et soustraire ;

- Déterminer une fraction d'une quantité ou d'une grandeur.**

Mixed to Improper
Number to Fraction

$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

3- Les fractions au cycle 3 - CM1

Dans la continuité, on se muscle sur la technique et on prend du recul sur le sens :

- Interpréter, représenter, écrire, dire, lire des fractions (d'un tout, d'une unité de longueur) ;
- Improper fraction / mixed number ;
- Encadrer, comparer, repérer** → la fraction devient **nombre**, progressivement ;
- Additionner et soustraire ;
- Déterminer une fraction d'une quantité ou d'une grandeur.

Mixed Number to Improper Fraction

$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

3- Les fractions au cycle 3 - CM1

Les décimaux, complètement adossés aux fractions !

- Un obstacle épistémologique ;
- Les décimaux sont des fractions décimales ;
- La virgule...

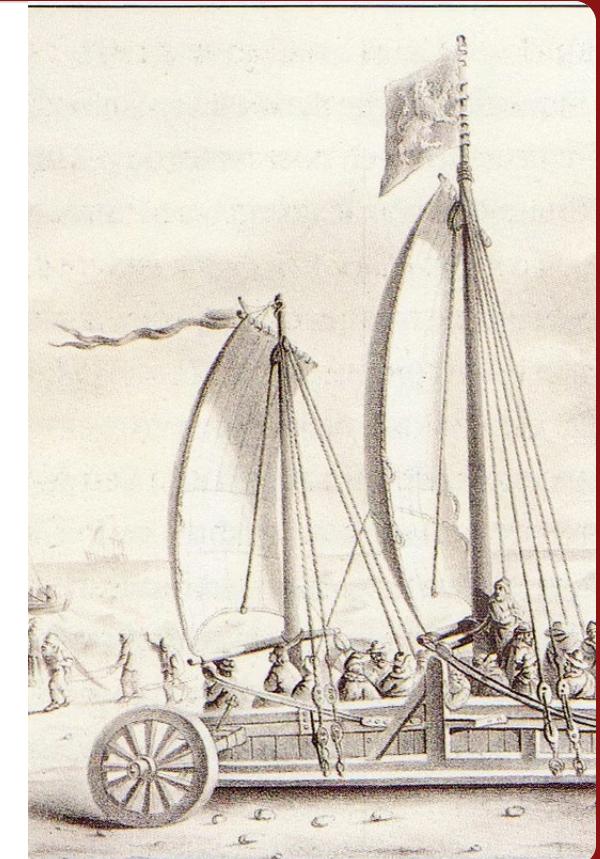


3- Les fractions - détour

Les nombres décimaux ne sont pas au départ une invention "mathématique"

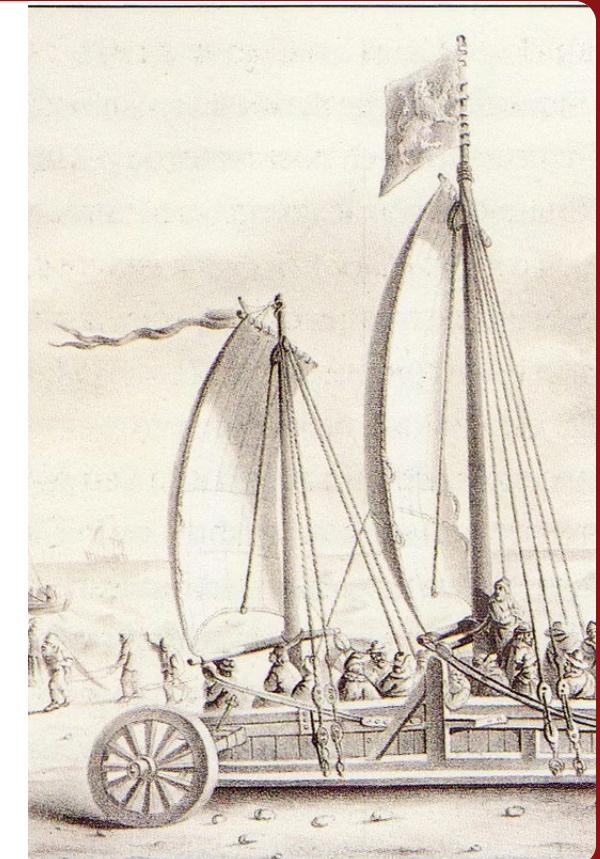
19①1①7②8③

19,178



3- Les fractions - détour

Pour dire les décimaux, associer le plus souvent possible et le plus longtemps possible la verbalisation en fractions décimales.



3- Les fractions au cycle 3 - CM2

Dans la continuité, on synthétise pour accéder au nombre, en lien avec le calcul :

- Partie d'un tout, partage de ce tout en parts égales, rapport entre la partie et le tout (CE1) ;
- Mesure de grandeurs (CE2) ;
- Repérage sur une demi-droite graduée (CM1) ;

- Le statut d'opérateur multiplicatif** : les élèves apprennent à calculer des fractions de quantités ou de grandeurs, comme deux tiers de 12 € ou trois quarts de 100 mètres.

3- Les fractions au cycle 3 - CM2

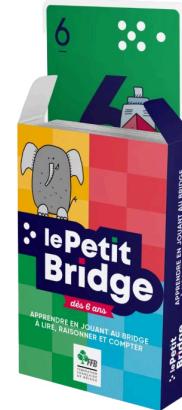
□ Les probabilités

Après la découverte de l'idée de mesure du hasard au CM1, avec « impossible », « possible », « certain », « probable », « peu probable », « une chance sur deux »,



3- Les fractions au cycle 3 - CM2

- Les probabilités au CM2 : « a chances sur b ».
 - On compare des probabilités,
 - parce qu'on sait dire le hasard avec des probabilités
 - parce qu'on sait comparer des fractions.



3- Les fractions au cycle 3 - CM2

- Les probabilités au CM2 : « a chances sur b ».

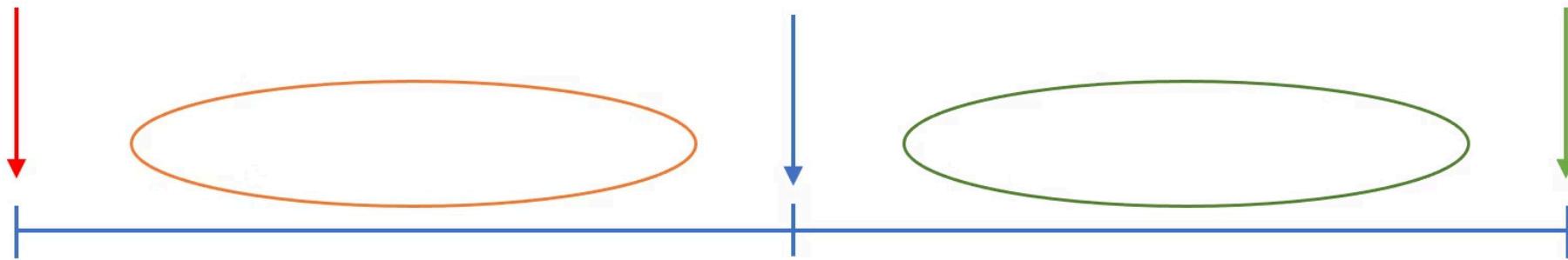
Plus tard, la probabilité prendra une forme plus mathématique :

de "2 chances sur trois" on passera à "une probabilité de deux tiers",

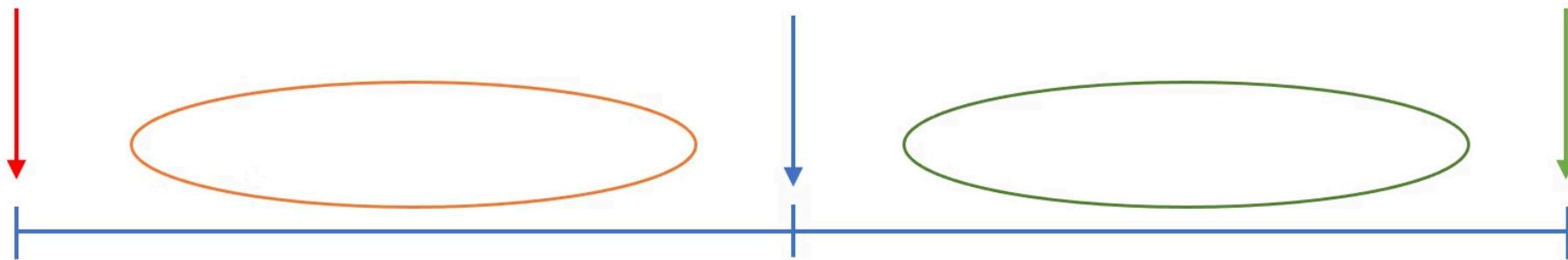
et on pourra calculer avec des probabilités.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i|B) \mathbb{P}(B),\end{aligned}$$

3- Les fractions au cycle 3 - CM



3- Les fractions au cycle 3 - CM



Possible ? Impossible ? Sûr que non ? A tous les coups ?
Peut-être ? Des fois oui ? Pas beaucoup de chances ?
Au milieu ? La moitié ? 50% ?

Probable / peu probable
Impossible /certain
Une chance sur deux

3- Les fractions au cycle 3 - CM

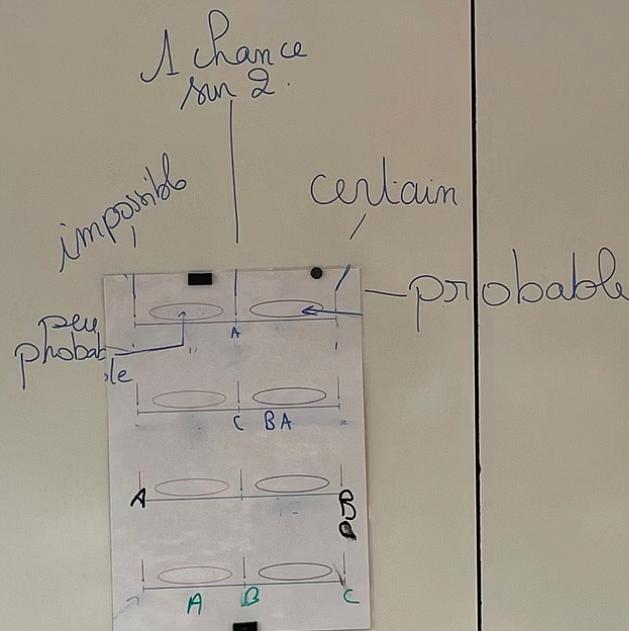


3- Les fractions au cycle 3 - CM

Rouges: 10

Blues: 9

Jaune: 1



A: obtenir du jaune

B: obtenir du rouge ou du bleu

C: obtenir du rouge

3- Les fractions au cycle 3 - CM1 et CM2



- Le lien avec la proportionnalité (implicite en cycle 2, mais existant)

La proportionnalité est impliquée au cycle 4 dans :

- les calculs de quatrièmes proportionnelles
- l'égalité des produits en croix
- le théorème de Thalès
- les agrandissements-réductions
- la résolution d'équations
- ...

Les fractions : prolongement

QUAND la fraction acquiert-elle complètement son statut de nombre ?

La fraction-nombre

Je considère que la grande brique est l'unité.

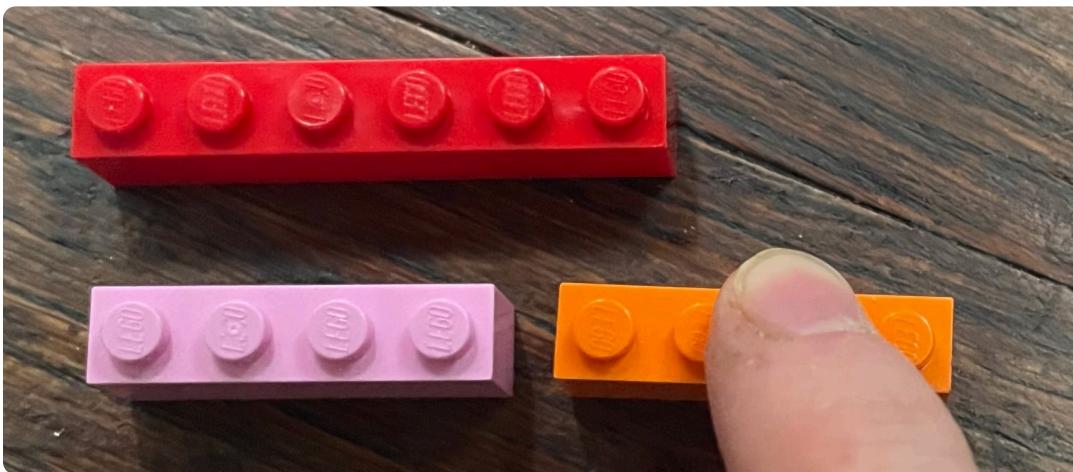


Et la brique rose, quel nombre représente-t-elle par rapport à l'unité ?

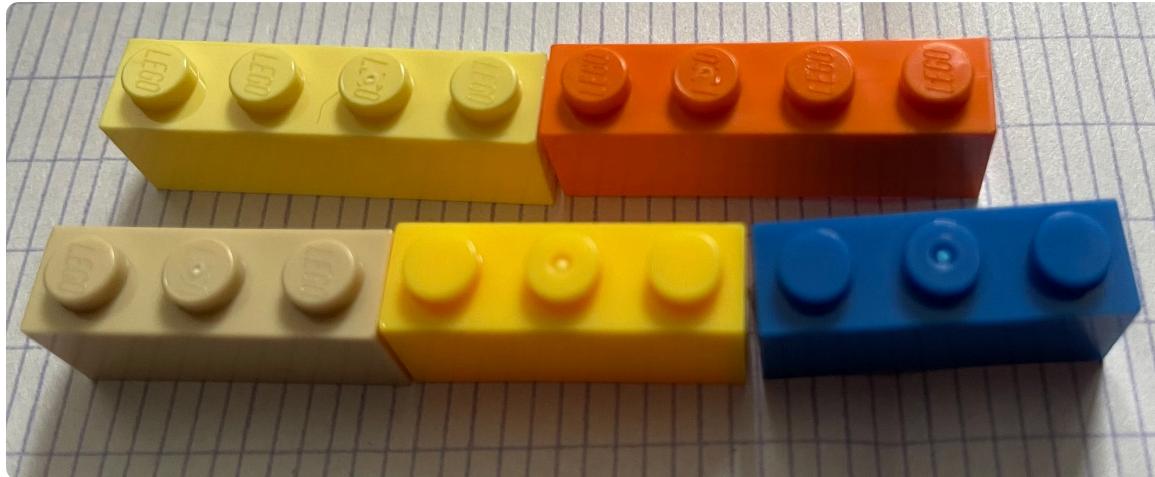
La fraction-nombre

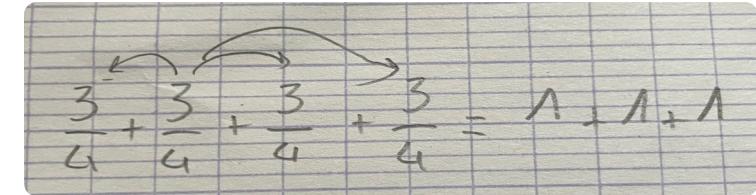


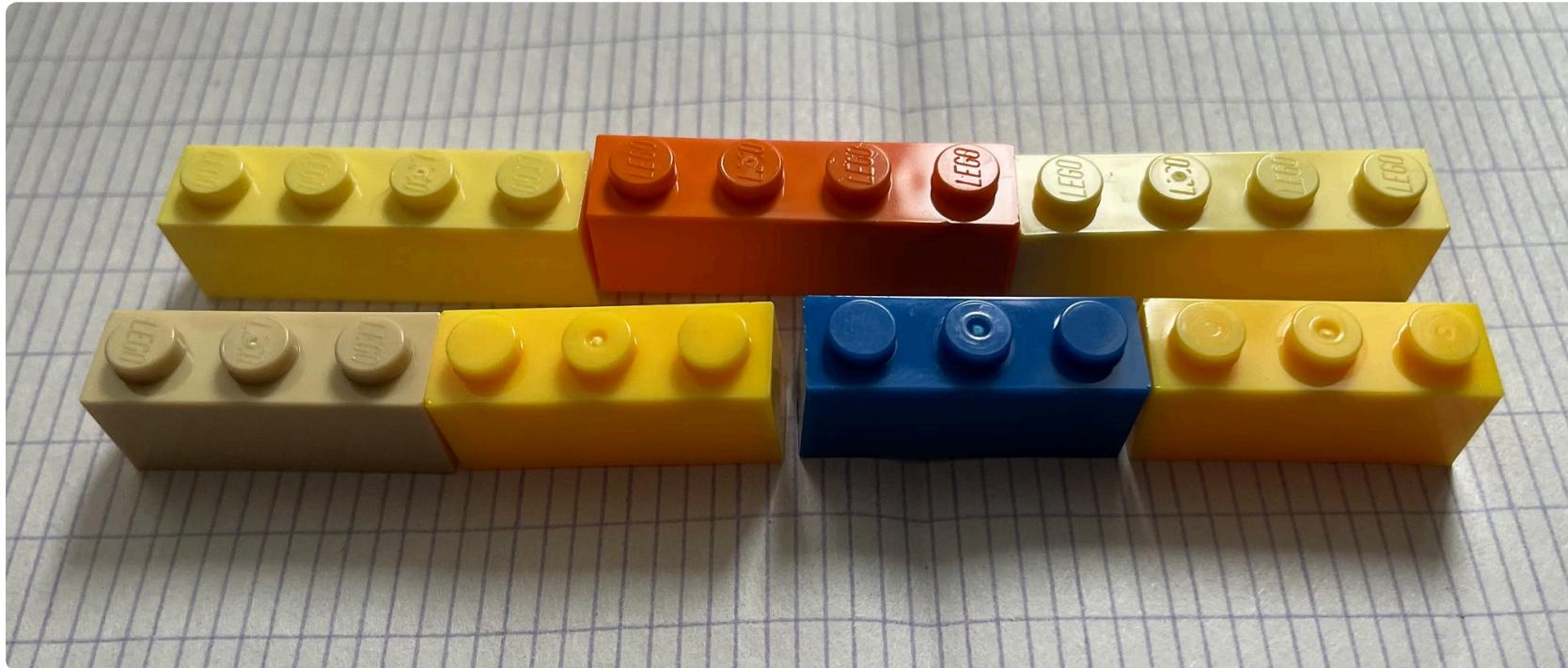
Si vous mettiez bout à bout des briques identiques, pensez-vous que vous arriveriez pile au même niveau, au bout d'un moment ?



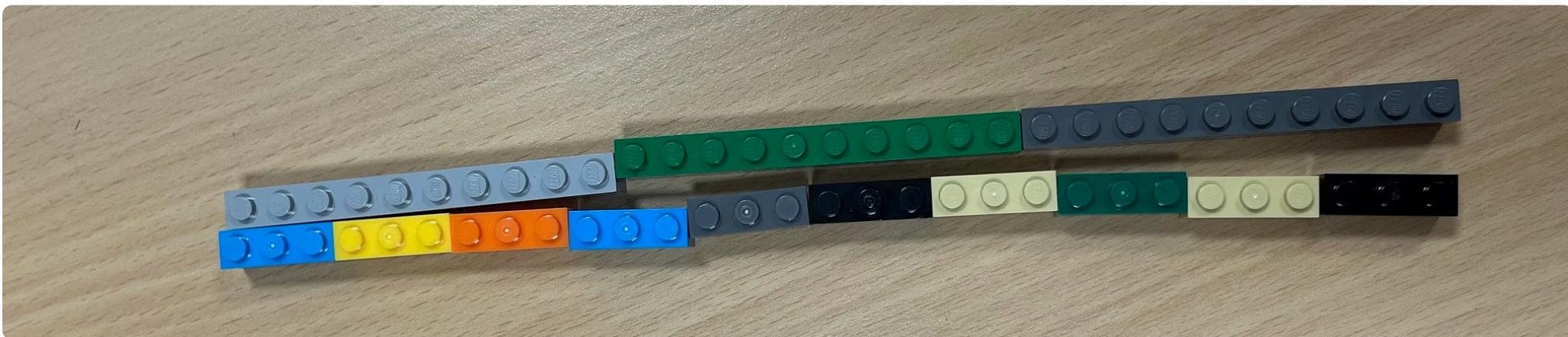
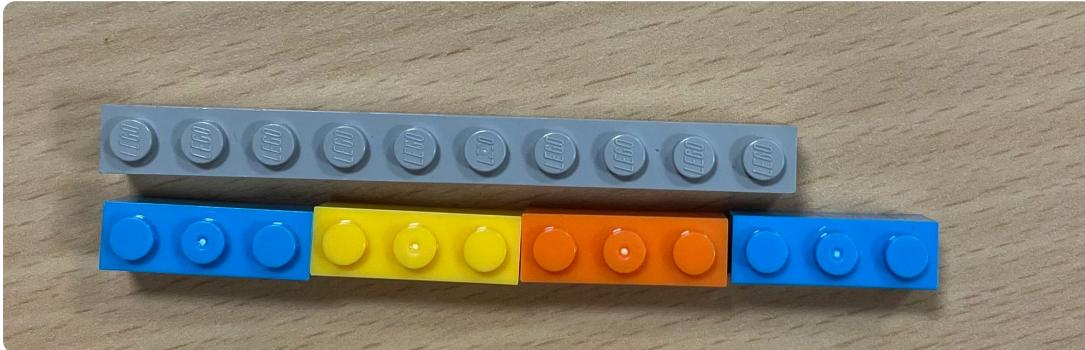
La fraction-nombre




$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{4}$$



La fraction-nombre



La fraction-nombre

On peut y voir une illustration de la commutativité de la multiplication (selon les exemples choisis) ;

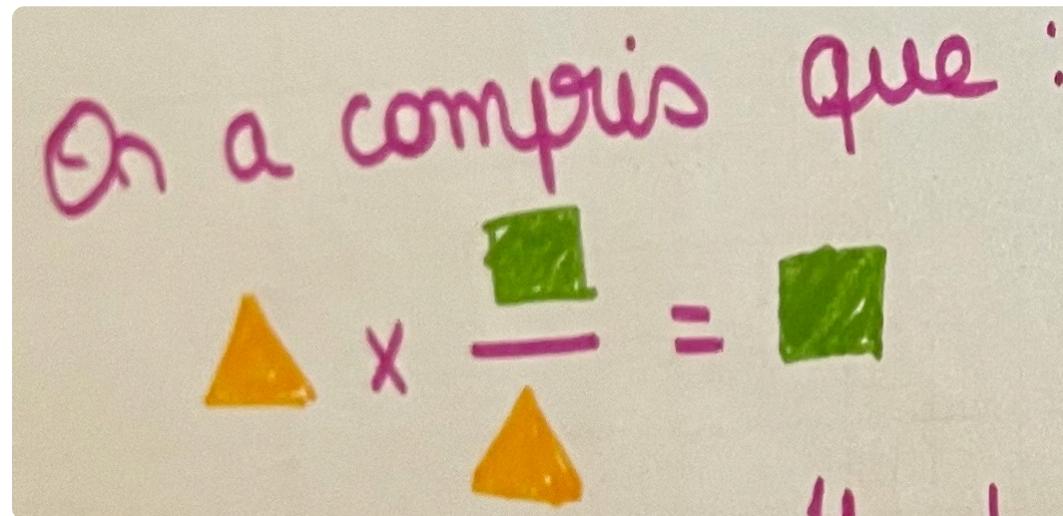
On voit par exemple que 3 briques $\frac{2}{3}$, c'est comme 2 briques unités.

$$3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$8 \times \frac{3}{8} = 3.$$

La fraction-nombre

Comment généraliser cette conjecture ?



La fraction-nombre

Comment généraliser cette conjecture ?

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

(pour a non nul)

Et là, on peut multiplier des fractions entre elles,
diviser des fractions entre elles,
résoudre des équations,
etc.

Merci de votre attention !

J'espère vous avoir intéressé(e)s,

J'espère vous être utile.

Avez-vous des questions ?